



Lista 02

Probabilidades na Física Estatística

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA
4302401 - MECÂNICA ESTATÍSTICA
SILVIO R. A. SALINAS
3 DE AGOSTO DE 2023

Bruno G. F. da Silva
Nº USP 12556980
brunogfdsilva@usp.br

Instituto de Física - USP
Rua do Matão, N. 1371, CEP 05508-090
Cidade Universitária, São Paulo - Brasil

Questão 1-

Prove as propriedades elementares

$$\begin{aligned}(i) \quad \langle af(x) + bg(x) \rangle &= a\langle f(x) \rangle + b\langle g(x) \rangle, \\(ii) \quad \langle cf(x) \rangle &= c\langle f(x) \rangle\end{aligned}$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são variáveis aleatórias associadas à distribuição de probabilidades $p(x)$, em que x assume valores no eixo real, e a , b e c são constantes.

Resposta:

Para provar a propriedade (i), tomando a definição de Valor Médio,

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=0}^M x_i P(x_i)}{\sum_{i=0}^M P(x_i)}$$

e adotando que x é uma variável aleatória contínua, e portanto não discretizada, permitindo assim modificar os somatórios de tal definição por integrais, além de utilizar as propriedades de linearidade de constantes na integração. tem-se que:

$$\begin{aligned}\langle af(x) + bg(x) \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} x[af(x) + bg(x)]dx = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)dx + \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} bxg(x)dx \\&= a \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = a\langle f(x) \rangle + b\langle g(x) \rangle \\&\Rightarrow \boxed{\langle af(x) + bg(x) \rangle = a\langle f(x) \rangle + b\langle g(x) \rangle}\end{aligned}$$

Não obstante, para a propriedade (ii), como visto no item anterior, pela linearidade:

$$\begin{aligned}\langle cf(x) \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)dx = c \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = c\langle f(x) \rangle \\&\Rightarrow \boxed{\langle cf(x) \rangle = c\langle f(x) \rangle}\end{aligned}$$

Questão 2-

Mostre que $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \geq 0$.

Resposta:

Adotando que x seja uma variável aleatória contínua, tem-se que o Desvio Linear em Relação à Média é dado por $\Delta x = x - \langle x \rangle$. Sendo assim, para a Média do Desvio Quadrático, acha-se que

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

Pra solucionar a equação, é possível utilizar do truque onde o Valor Médio é a aplicação do operador $p \frac{\partial}{\partial p}$ na Probabilidade de ocorrência do evento N_1 em um espaço de N microestados ($P_N(N_1)$), tem-se que

$$\langle N_1 \rangle = p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} p^{N_1} q^{N - N_1} \right).$$

Com a utilização do binômio de Newton e considerando $p = q = 1$, é possível concluir que

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{x=0}^N x^2 \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x} \right) = pN \frac{d}{dp} (p(p+q)^{N-1}) = pN + p^2 N^2 - p^2 N \\ \langle x \rangle^2 &= \left[p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{x=0}^N x^2 \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x q^{N-x} \right) \right]^2 = \dots = p^2 \left(\frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right)^2 = N^2 p^2 \end{aligned}$$

Com $p = q = 1$, é possível concluir que

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \dots = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \geq 0$$

Questão 3-

Considere uma função de distribuição gaussiana,

$$p(x) = A \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right],$$

em que A , x_0 e σ são constantes, e a variável aleatória x pode assumir valores em todo o eixo real.

Verifique a famosíssima integral gaussiana,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2},$$

com $\alpha > 0$. Utilize esse resultado para mostrar que $A = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}$ quando a função $p(x)$ for normalizada, isto é, quando

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Supondo que a distribuição esteja devidamente normalizada, mostre que

$$\langle x \rangle = x_0; \quad \langle (x - x_0)^2 \rangle = \sigma^2.$$

Note que, tomando $x_0 = \langle N_1 \rangle = N/2$ e $\sigma = \sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle} = N^{1/2}/2$, temos uma excelente representação gaussiana para a distribuição binomial

$$P_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{N_1} \left(\frac{1}{2} \right)^{N - N_1}$$

Com um pouco de paciência e habilidade num microcomputador, é possível comparar os gráficos de $P_N(N_1)$ e da gaussiana correspondente (tente construir gráficos para $N = 5$ e $N = 10$, por exemplo). O “teorema do limite central” da teoria das probabilidades garante que, em quase todos os casos de interesse físico, as distribuições de probabilidades tendem para a gaussiana associada quando o número de eventos for suficientemente grande.

Resposta:

Para verificar a Integral Gaussiana, inicialmente ela é denotada por U e multiplicada pela sua semelhante, porém sendo integrada em dy , com a finalidade de obter U^2 . Sendo assim, mudando para

coordenadas polares, finalmente obtém-se que

$$\begin{aligned} U^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha y^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha(x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow \boxed{U = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

Agora, normalizando $p(x)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx &= A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1 = A \left(\frac{\pi}{1/2\sigma^2}\right)^{1/2} \\ &\Rightarrow \boxed{A = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}} \end{aligned}$$

Agora, supondo que a distribuição esteja devidamente normalizada e sabendo que x é contínua (visto que assume valores em todo o eixo dos reais), pela definição de Valor Médio e definindo uma função tal que $x_1 = x - x_0$:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xA \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 A \exp\left[-\frac{(x_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_0 A \exp\left[-\frac{(x_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx_1 \\ &= x_0 \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[-\frac{(x_1)^2}{2\sigma^2}\right] dx_1 = x_0 \Rightarrow \boxed{\langle x \rangle = x_0} \end{aligned}$$

E por fim, fazendo o valor médio de $(x - x_0)^2$, ainda com $x_1 = x - x_0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle (x - x_0)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 A \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 A \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right] dx_1 \cdot \left(\frac{2\sigma^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \sigma^2 \frac{d}{dx_1} \left(A \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right] \right) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 x_1 A \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right] dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 A \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right] dx_1 \Rightarrow \boxed{\langle (x - x_0)^2 \rangle = \sigma^2} \end{aligned}$$

Questão 4-

A expansão assintótica de Stirling,

$$\ln N! = N \ln N - N + O(\ln N),$$

que funciona muito bem para N grande, é um recurso de enorme utilidade em mecânica estatística (em conexão com o “limite termodinâmico”).

Utilizando o método da indução finita e uma integração por partes, mostre que

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

para qualquer inteiro $n = 1, 2, 3 \dots$ (por definição, $0! = 1$). Admitindo uma continuação analítica, para n qualquer, essa integral dá origem à definição da “função gama”.

O valor assintótico dessa integral (no limite de n muito grande) pode ser obtido através do “método de Laplace”. Introduzindo uma mudança de variável, temos

$$I(n) = \int_0^{\infty} \exp[nf(y)] dy,$$

em que

$$f(y) = \ln y - y.$$

Note que a função $f(y)$ tem um máximo para $y = y_0 = 1$. Note também que as contribuições para a integral de uma função do tipo $\exp[nf(y)]$, quando $n \rightarrow \infty$, provêm essencialmente das vizinhanças desse máximo. Podemos então escrever um desenvolvimento em série de Taylor de $f(y)$ nas vizinhanças do máximo,

$$f(y) = -1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \dots,$$

descartar os termos de ordem superior, e fazer a integração sobre todo o eixo real. Assim temos

$$I(n) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-n - \frac{n}{2}(y-1)^2\right] dy = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{1/2} \exp(-n),$$

de onde é possível obter a forma de Stirling.

Os alunos com (excelente) formação matemática talvez consigam provar - com todo o rigor matemático, é claro - que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\{ \int_a^b \exp[nf(x)] dx \right\} = f(x_0),$$

em que x_0 é o ponto de máximo de uma função contínua $f(x)$, com $a < x_0 < b$.

Resposta:

Partindo da integral dada, em busca de solucioná-la, é possível utilizar o Método da Indução Infinita e a Integração por Partes, a qual se baseia em:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d}{dx} [u(x)v(x)] &= \int_a^b \frac{du(x)}{dx} v(x) + \int_a^b u(x) \frac{dv(x)}{dx} \\ \Rightarrow \int_a^b u(x) \frac{dv(x)}{dx} &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{du(x)}{dx} v(x) \end{aligned}$$

Sendo assim, escolhendo que $u(x) = x^n$ e $v(x) = -e^{-x}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx &= \left(-x^n e^{-x} \right) \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n \left[\left(-x^{n-1} e^{-x} \right) \Big|_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty x^{n-2} e^{-x} dx \right] \\ &= n \cdot (n-1) \left[\left(-x^{n-2} e^{-x} \right) \Big|_0^\infty + (n-2) \int_0^\infty x^{n-3} e^{-x} dx \right] \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots = n! \\ \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty x^n e^{-x} dx} &= n! \end{aligned}$$

Questão 5-

Considere o problema de um bêbado em uma dimensão, dando N passos de mesmo comprimento a partir de determinada origem. Em cada passo, o bêbado pode ir para a direita, com probabilidade p , ou para a esquerda, com probabilidade $q = 1 - p$.

Letra (a)

Para $N = 6$ e $p = 2/3$, desenhe um gráfico de $P_N(N_1)$ contra N_1/N , em que N_1 é o número de passos para a direita. Obtenha $\langle N_1 \rangle$ e $\langle N_1^2 \rangle$, e use esses valores para escrever a “distribuição gaussiana correspondente”, $p_G(N_1)$, isto é, a distribuição gaussiana com os mesmos valores do primeiro e do segundo momentos (ou seja, do valor médio e do valor quadrático médio). Desenhe um gráfico de $p_G(N_1)$ contra N_1/N e compare com o resultado para a distribuição binomial correspondente.

Resposta:

Sabendo que a probabilidade de N_1 passos serem dados em meio a N passos é dada por

$$P_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} p^{N_1} q^{N - N_1},$$

pela definição de Valor Médio e como já visto na Questão 2, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle N_1 \rangle &= p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} p^{N_1} q^{N - N_1} \right) = Np(p + q)^N - 1 = Np \Rightarrow \boxed{\langle N_1 \rangle = 4} \quad \text{e} \\ \langle N_1^2 \rangle &= p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{N_1=0}^N \frac{N_1 N!}{N_1!(N - N_1)!} p^{N_1} q^{N - N_1} \right) = pN[1 + p(N - 1)] \Rightarrow \boxed{\langle N_1^2 \rangle = \frac{52}{3}} \end{aligned}$$

também sendo possível calcular o Desvio Quadrático, $\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 = Np(1 - p)$.

A partir disso, encontra-se que a Distribuição Gaussiana Correspondente é dada por

$$p_G(N_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1 - p)}} \exp\left[-\frac{(N_1 - Np)^2}{2Np(1 - p)}\right]$$

Sendo assim, é possível elaborar um gráfico comparando as funções $P_N(N_1) \times N_1/N$ (distribuição binomial) e $p_G(N_1) \times N_1/N$ (distribuição gaussiana), como visto abaixo:

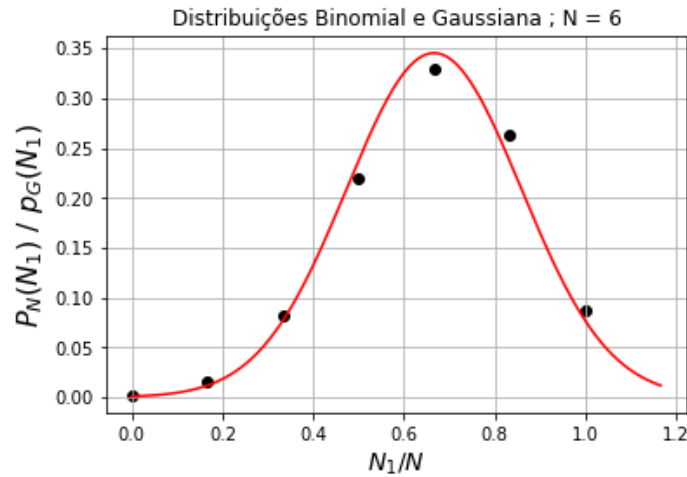


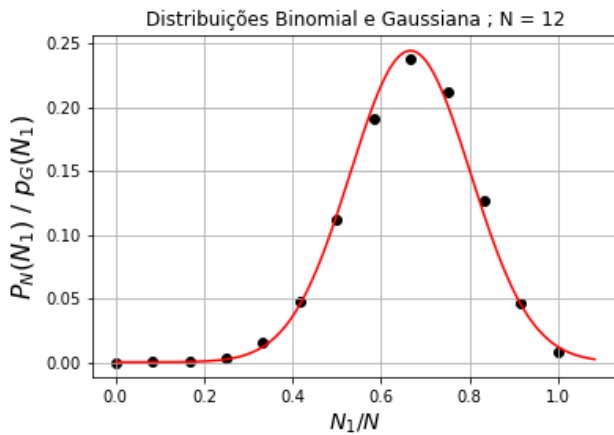
Figura 1: Distribuições Binominal e Gaussiana para $N = 6$

Letra (b)

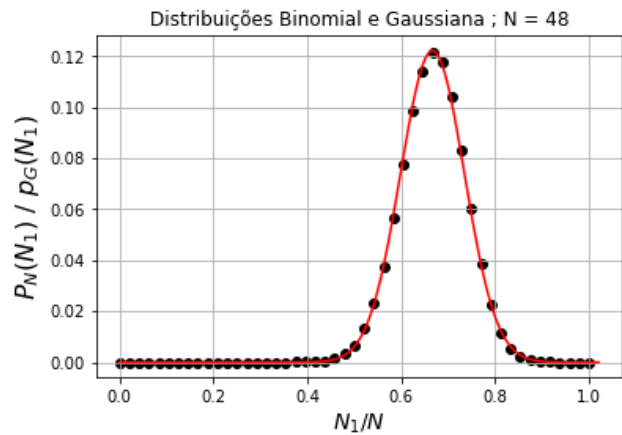
Faça de novo os cálculos do item anterior para $N = 12$ e $N = 48$. Os novos gráficos são muito diferentes? Por que?

Resposta:

Para $N = 12$ e $N = 48$, tem-se que



(a) Distribuições para $N = 12$



(b) Distribuições para $N = 48$

$$N_1 = 12 : \langle N_1 \rangle = 8, \langle N_1^2 \rangle = \frac{200}{3} \quad \text{e} \quad N_1 = 48 : \langle N_1 \rangle = 32, \langle N_1^2 \rangle = \frac{3104}{3}$$

Após as simulações, nota-se que quanto maior o N , mais a Distribuição Binomial encaixa-se na Gaussiana, além do Desvio Quadrático Médio ir diminuindo, estreitando-a, visto que a precisão do valor médio aumenta.

Questão 6***-

O “modelo da urna” de Ehrenfest proporciona uma ilustração excelente da presença de flutuações estatísticas, do papel dos grandes números, e da “seta do tempo” (enfim, do significado estatístico da segunda lei da termodinâmica). Veja, por exemplo, o artigo de Ambegaokar e Clerk, “Entropy and time”, Am. J. Phys. **67**, 1068-1073 (1999). A “equação estocástica” associada ao modelo da urna é linear (e exatamente solúvel). Há muitos trabalhos sobre esse modelo e suas variantes, com destaque para a solução pioneira de Mark Kac de 1947 (ver um trabalho recente de M. Baldovin, L. Caprini e A. Vulpiani, “Irreversibility and typicality: A simple analytical result for the Ehrenfest model”, Physica A524, 422, 2019).

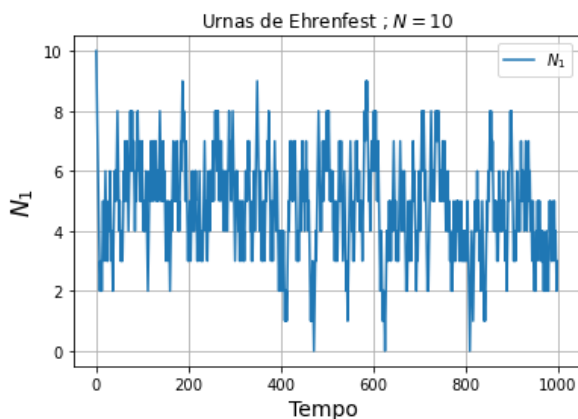
Na versão original do modelo da urna nós consideramos duas caixas, N bolas numeradas, e um gerador de N números aleatórios. Inicialmente, há N_1 bolas na urna 1, e $N_2 = N - N_1$ bolas na urna 2. Em cada intervalo de tempo, nós sorteamos um número aleatório entre 1 e N , e mudamos a posição (localização nas urnas) da bola correspondente.

Item (i)

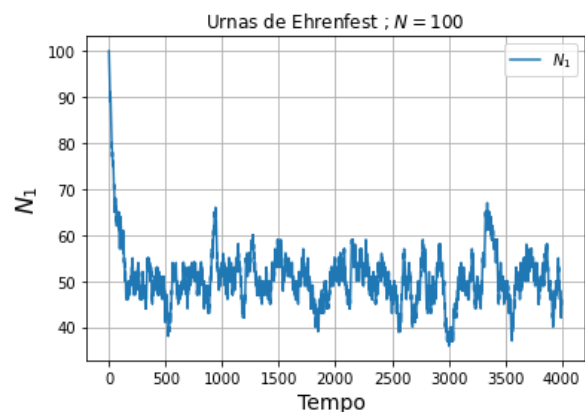
Faça simulações numéricas, com um bom gerador de números aleatórios, para desenhar gráficos de N_1 (número de bolas na urna 1) em função do tempo t (devidamente discretizado em intervalos iguais Δt). Faça as simulações para uma situação inicial em que $N_1 = N$ (todas as bolas estão na urna 1). Considere dois valores de número total de bolas: (a) $N = 10$ e (b) $N = 100$. O que você pode dizer a respeito das flutuações do valor de N_1 ? O que acontece no limite $t \rightarrow \infty$?

Resposta:

Os gráficos de N_1 em função do tempo t para $N = 10$ e $N = 100$ estão presentes nas Figuras 3a e 3b, abaixo, respectivamente. Ambos foram feitos utilizando a biblioteca “random” (Python).



(a) Urnas de Ehrenfest para $N = 10$



(b) Urnas de Ehrenfest para $N = 100$

É notável dizer que a partir de um certo intervalo de tempo, os valores de N_1 flutuam aleatoriamente ao redor de $N/2$ (5 e 50, respectivamente), e em um limite em que $t \rightarrow \infty$, nota-se que N_1 realmente tende/converge para se equilibrar em $N/2$.

Item (ii)

Mostre que a evolução temporal de $P(N_1, t)$, probabilidade de encontrar N_1 bolas na urna 1 no tempo t , é dada pela “equação de diferenças”

$$P(N_1, t + \Delta t) = P(N_1 - 1, t)W_1 + P(N_1 + 1, t)W_2$$

em que W_1 e W_2 são “taxas de transição”. Adotando a hipótese de equiprobabilidade das configurações de bolas, quais são as expressões de W_1 e W_2 ? Verifique que a distribuição binomial é uma solução dessa equação “no equilíbrio” (isto é, para $t \rightarrow \infty$).

Resposta:

Demonstração. Inicialmente, a configuração em que há N_1 bolas presentes na urna 1 no instante de tempo $t + \Delta t$ urge de duas possibilidades de configuração no tempo t :

- Ou haviam $N_1 - 1$ bolas na urna 1 e $N - (N_1 - 1)$ bolas na urna 2, sendo transferida uma bola dessa última para a primeira.
- Ou haviam $N_1 + 1$ bolas na urna 1 e $N - (N_1 + 1)$ na urna 2, sendo transferida uma bola da primeira para última.

Sendo assim, tem-se as probabilidades $P_N(N_1 - 1, t)$ e $P_N(N_1 + 1, t)$, além das suas respectivas Taxas de Transição, as quais, considerando a Hipótese da Equiprobabilidade, são as probabilidades de tirar uma bola da urna X, ou seja, o número de microestados N_1 sobre o número total de microestados N , e portanto, são descritas como

$$W_1(2 \rightarrow 1) = \frac{N - (N_1 - 1)}{N} \quad \text{e} \quad W_2(1 \rightarrow 2) = \frac{N_1 + 1}{N}.$$

Sendo assim, tem-se que a Equação Diferencial Estocástica (ou “Equação Mestra”) é dada por

$$\mathbb{P}_N(N_1, t + \Delta t) = P_N(N_1 - 1, t)W_1(2 \rightarrow 1) + P_N(N_1 + 1, t)W_2(1 \rightarrow 2)$$

E portanto, tem-se que

$$\mathbb{P}_N(N_1) = P_N(N_1 - 1) \frac{N - (N_1 - 1)}{N} + P_N(N_1 + 1) \frac{N_1 + 1}{N} \quad (6.2.1)$$

Em busca de verificar se a Distribuição Binomial é uma solução, primeiramente, denota-se que

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e aplica-se a mesma na Equação 6.2.1, obtendo assim

$$\begin{aligned} P_N(N_1) &= \binom{N}{N_1-1} \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N-(N_1-1)}{N} + \binom{N}{N_1+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N_1+1}{N} \\ &= \left(\frac{N!}{(N_1-1)!(N-(N_1-1))!} \frac{N-(N_1-1)}{N} + \frac{N!}{(N_1+1)!(N-(N_1+1))!} \frac{N_1+1}{N} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^N \\ &= \left[\binom{N-1}{N_1-1} + \binom{N-1}{N_1} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^N = \binom{N}{N_1} \left(\frac{1}{2}\right)^N \Rightarrow \boxed{P_N(N_1) = \binom{N}{N_1} \left(\frac{1}{2}\right)^N} \end{aligned}$$

Sendo assim, finalmente aplicando na Equação 6.2.1, para $t \rightarrow \infty$, temos que

$$\boxed{\mathbb{P}_\infty = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-N_1}}$$

■

Item (iii)

Utilize essa equação estocástica para obter uma expressão para a evolução temporal do valor esperado (valor médio) de N_1 ,

$$\langle N_1 \rangle_t = \sum_{N_1} N_1 P(N_1, t).$$

Compare a forma de $\langle N_1 \rangle_t$ com os gráficos de N_1 contra t obtidos no item (i).

Resposta:

Aplicando o Valor Médio na Equação 6.2.1 e expandindo-a, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle N_1 \rangle_{t+\Delta t} &= \sum_{N_1=0}^N N_1 P_N(N_1-1) \frac{N-(N_1-1)}{N} + \sum_{N_1=0}^N N_1 P_N(N_1+1) \frac{N_1+1}{N} \\ &= \langle N_1 \rangle_t - \frac{2\langle N_1 \rangle_t}{N} + 1 \Rightarrow \boxed{\langle N_1 \rangle_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \langle N_1 \rangle_t + 1} \end{aligned}$$

Analisando a relação, é possível associa-la à série

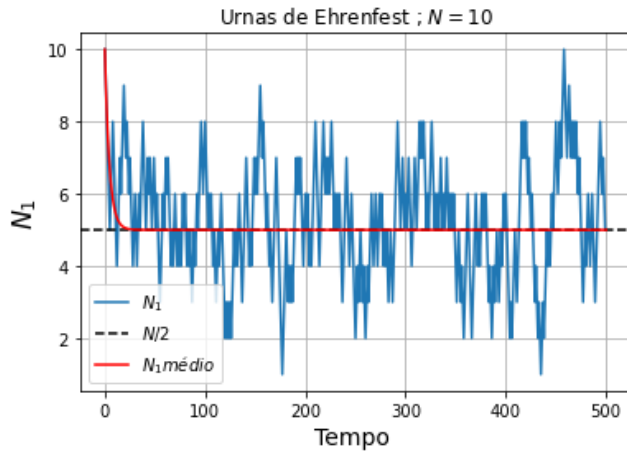
$$\langle N_1 \rangle_x = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^x + \mathfrak{s}_N \quad \text{com} \quad \mathfrak{s}_N = \left[1 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^N\right] / \left[1 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)\right]$$

e portanto, chega-se em

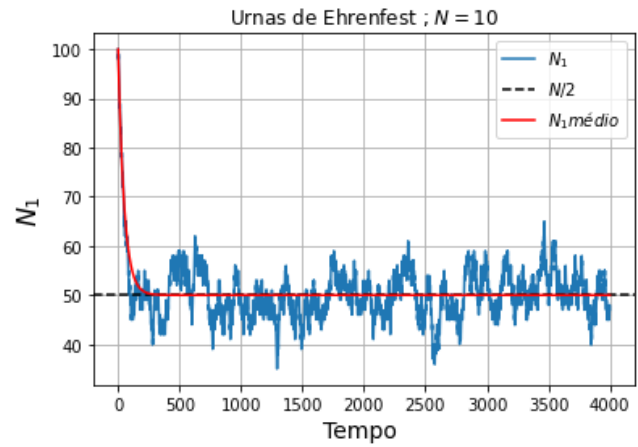
$$\langle N_1 \rangle_t = \mathfrak{K} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^t + \frac{N}{2}$$

sendo $\mathfrak{K}$ constante e baseada nas condições iniciais do sistema. Por fim, nota-se que no limite de t muito grande ($\rightarrow \infty$), $\langle N_1 \rangle$ tende à convergência encontrada no item (i), $N/2$.

Comparando $\langle N_1 \rangle_t$ com os gráficos obtidos no item já citado, encontra-se as Figuras 4a e 4b, as quais demonstram que quanto maior o N , melhor os valores de N_1 flutuam ao redor de $N/2$ a partir de um certo tempo.



(a) Urnas de Ehrenfest para $N = 10$ com $\langle N_1 \rangle_t$



(b) Urnas de Ehrenfest para $N = 100$ com $\langle N_1 \rangle_t$